2022年度鳥取大学医学部、工学部　数学解答

【医Ⅰ】【工Ⅱ】

(1)　$w_1=\dfrac{\alpha+z}{i}$ より $\alpha+z=iw_1$

$$z=iw_1-\alpha$$

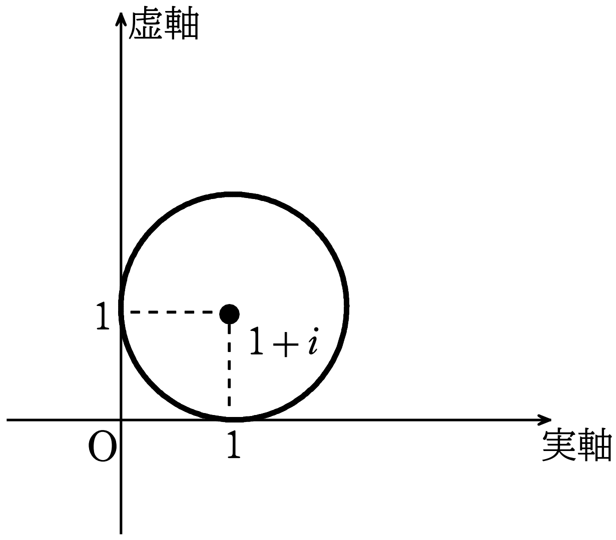
$|z|=1$なので

$$|iw_1-\alpha|=1$$

$$\left|w_1-\frac{\alpha}{i}\right|=1$$

$\dfrac{\alpha}{i}=\dfrac{-1+i}{i}\cdot\dfrac{i}{i}=\dfrac{-i-1}{-1}=1+i$より

w_1 は点 $1+i$ を中心とする半径 1 の円を描く. よって w_1 が描く図形は右図



(2)　$w_2\overline{\alpha}-\overline{w_2}\alpha+ki=0$

$w_2=x+yi$ (x, y：実数)とおく

$(x+yi)(-1-i)-(x-yi)(-1+i)+ki=0$

$2(x+y)i=ki$

$2x+2y-k=0$…①

$\therefore$ w_1 の描く軌跡と共有点をもつとき, xy 平面で点 $(1,1)$ を中心とする半径 1 の円と直線①が共有点をもてばよいので

$$\frac{|2+2-k|}{\sqrt{4+4}}\leqq 1$$

$|k-4|\leqq 2\sqrt{2}$

$4-2\sqrt{2}\leqq k\leqq 4+2\sqrt{2}$

$\therefore k$の最大値は$4+2\sqrt{2}$…(答)

【医Ⅱ】【工Ⅲ】

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{TA}}=\left(a,\dfrac{1}{a}\right)-\left(t,\dfrac{1}{t}\right)$

$$=\left(a-t,\frac{1}{a}-\frac{1}{t}\right)=(a-t)\left(1,-\frac{1}{at}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{TB}}=\left(b-t,\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{t}\right)=(b-t)\left(1,-\dfrac{1}{bt}\right)$より

$$f(t)=\frac{1}{2}\left|-\frac{(a-t)(b-t)}{bt}+\frac{(a-t)(b-t)}{at}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{(t-a)(b-t)}{bt}-\frac{(t-a)(b-t)}{at}\right|$$

$$=\frac{(t-a)(b-t)}{2t}\left|\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right| \quad (\because\ a<t<b\ )$$

$$=\frac{(t-a)(b-t)}{2t}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \quad (\because\ \frac{1}{a}>\frac{1}{b}\ )$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\frac{t^2-(a+b)t+ab}{t}\right\}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{t+\frac{ab}{t}-(a+b)\right\}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$t>0$, $\dfrac{ab}{t}>0$ なので相加平均と相乗平均の関係より $t+\dfrac{ab}{t}\geqq 2\sqrt{ab}$

よって $f(t)\leqq\dfrac{1}{2}(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$

等号は $t=\dfrac{ab}{t} \Leftrightarrow t^2=ab$

$a<t<b$ より $t=\sqrt{ab}$ で成立するので

$M=\dfrac{1}{2}(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$ であり, $t=\sqrt{ab}$ …(答)

(2)　$a=1, b=2$ のとき

$M=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2\cdot\dfrac{1}{2}$

$\quad=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{4}$ …(答)

【医Ⅲ】【工Ⅳ】

(1)　$f(t)=2\sin t+1-2\sin^2 t-1$

$=-2\sin^2 t+2\sin t$

$=-2\left(\sin t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$

$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ なので, $0\leqq\sin t\leqq 1$ より

$\sin t=\dfrac{1}{2}$ つまり $t=\dfrac{\pi}{6}$ で最大値 $\dfrac{1}{2}$ …(答)

(2)　$\dfrac{dx}{dt}=2\cos t-2\sin 2t$, $\dfrac{dy}{dt}=2\sin 2t$

$y=1$ のとき, $\cos 2t=0$

$0 \leqq 2t \leqq \pi$ より $2t=\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$

このとき $x=2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1=\sqrt{2}-1$

$\dfrac{dx}{dt}=2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2=\sqrt{2}-2$, $\dfrac{dy}{dt}=2$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2}{\sqrt{2}-2}\cdot\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+2}$$
$$=-(2+\sqrt{2})$$

となるので, 求める接線の方程式は

$y-1=-(2+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}+1)$

よって $y=-(2+\sqrt{2})x+\sqrt{2}+1$ …(答)

(3) $\dfrac{dx}{dt}=2\cos t-4\sin t\cos t$

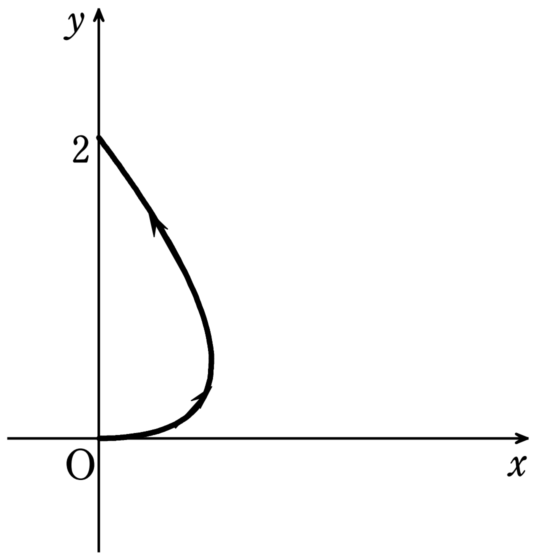
$=2\cos t(1-2\sin t)$

$\dfrac{dy}{dt}=2\sin 2t$ より増減は次のようになる

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	
x	0	$\rightarrow$	$\frac{1}{2}$	$\leftarrow$	0
$\frac{dy}{dt}$		$+$	$+$	$+$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nwarrow$	2

曲線 C は右図のようになるので求める面積を S とすると

2022年度鳥取大学医学部、工学部　数学解答



$S=\int_0^2 x\,dy$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{dy}{dt}dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin t+\cos 2t-1)(2\sin 2t)dt$

$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos t\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 4t\,dt-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt$

$=8\left[\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-\frac{1}{4}\cos 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{8}{3}-\frac{1}{4}(1-1)+(-1-1)$

$=\frac{2}{3}$…(答)

【医Ⅳ】

(1)　数学的帰納法によりすべての正整数nに対して$a_n\geqq n$…①

が成り立つことを示す.

(Ⅰ) $n=1$ のとき, a_1 は正整数だから $a_1\geqq 1$

(Ⅱ) $n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると $a_k\geqq k$ であるから

$a_{k+1}>a_k\geqq k$

a_{k+1} は正整数だから $a_{k+1}\geqq k+1$

(Ⅰ)(Ⅱ)よりすべての正整数nに対して①が成り立つ.…(証終)

(2)　$k\geqq 2$のとき$\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}=\frac{1}{k(k-1)}>\frac{1}{k^2}$…②

$a_k\geqq k$より$\frac{1}{{a_k}^2}\leqq\frac{1}{k^2}$

∴ $n\geqq 3$ のとき②を用いると

$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}\right)^2\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{4}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k^2}<1+\frac{1}{4}+\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$

$=\frac{7}{4}-\frac{1}{n}$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)^2\leqq\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{4}-\frac{1}{n}\right)=\frac{7}{4}<2$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right)^2<2\cdots(\text{証終})$$

【工Ⅰ】

(1)　$a_1=1,\ b_1=3$

$a_2=5a_1+b_1$

$=5+3$

$=8\cdots$(答)

$b_2=a_1+5b_1$

$=1+15$

$=16\cdots$(答)

$a_3=5a_2+b_2$

$=40+16$

$=56\cdots$(答)

$b_3=a_2+5b_2$

$=8+80$

$=88\cdots$(答)

(2)　$a_{n+1}+b_{n+1}=6(a_n+b_n)$

$a_n+b_n=4\cdot 6^{n-1}\cdots$(答)…①

$a_{n+1}-b_{n+1}=4(a_n-b_n)$

$a_n-b_n=-2\cdot 4^{n-1}\cdots$(答)…②

(3)　①＋②より

$2a_n=4\cdot 6^{n-1}-2\cdot 4^{n-1}$

$a_n=2\cdot 6^{n-1}-4^{n-1}\ \cdots$(答)

①－②より

$2b_n=4\cdot 6^{n-1}+2\cdot 4^{n-1}$

$b_n=2\cdot 6^{n-1}+4^{n-1}\ \cdots$(答)